22.3 Kurvenintegrale

{ Integrationswege, Weg(un)abhängigkeit, **Stammfunktionen** }

„Alle" grundlegenden Aussagen der FT erschließen sich über sog. $\boxed{\text{Wegintegrale (holomorpher) Funktionen.}}$

Überleitung: Gemäß $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sind Kurven in $\mathbb{C}$ dasselbe wie Kurven in $\mathbb{R}^n$ mit $n = 2$

⟶ vgl. Kapitel 17.1, speziell Def. 17.1.1

Notationen :

Sei $\gamma : \mathbb{R} \supset [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Kurve, z.B. (Kreislinie)

$$\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}.$$

i) $\dot{\gamma}(t)$ oder $\gamma'(t)$ bezeichnet die Ableitung von γ nach dem reellen Parameter t. Schreibt man

$$\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t) \cong \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

mit reellen Funktionen

$$\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R},$$

so ist also per Def.

$$\boxed{\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t) \cong \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}}$$

„Tangentenvektor"

Bspl: $\begin{cases} \varphi(t) = \cos t, \\ \psi(t) = \sin t \end{cases}$

für $\gamma(t) = e^{it}$. Also:

$$\dot{\gamma}(t) = -\sin t + i \cos t = i\, e^{it}$$

ii) Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ eine gegebene Menge.

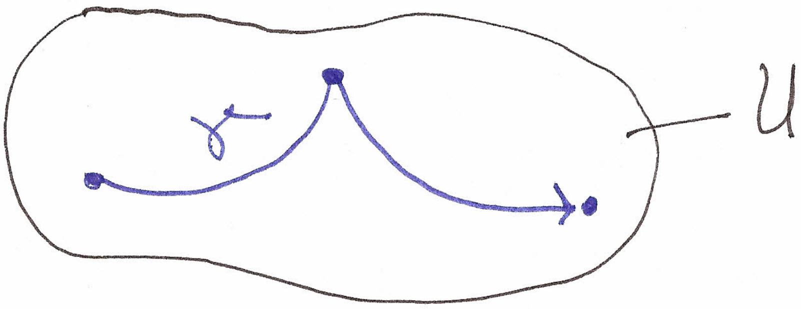
Eine komplexe Kurve

$$\gamma : [a,b] \to \underline{\underline{\mathcal{U}}}$$

(die Kurve verläuft in $\mathcal{U}$!)

heißt ein $\boxed{\text{Integrationsweg in } \mathcal{U}}$,

falls: $\begin{cases} \gamma \text{ stetig ist auf } [a,b] \\ \text{und} \\ \gamma'(t) \text{ bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen existiert (Bem. nach Def. 18.1.1)} \end{cases}$



iii) Für <u>stetige</u> Funktionen

$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ setzen wir noch

$$\boxed{\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t)\,dt}$$

(<u>Integral</u> $\mathbb{C}$-<u>wertiger Funktionen</u>) $\square$

Nun zur entscheidenden

Definition 22.3.1: Sei $\gamma : [a,b] =: I \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Integrationsweg. Ist

$$f : \gamma(I) \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine <u>stetige</u> Funktion, welche (zumindest) auf der Spur $\gamma(I)$ von γ

definiert ist, so definiert man das

(komplexe) Kurvenintegral von f längs γ

durch die Formel

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt} \in \mathbb{C}$$

0.) Analogie zum Kurvenintegral von Vektorfeldern!

Bem: 1.) Die rechte Seite ist gemäß iii)

von eben zu bilden mit

$$g : [a,b] \to \mathbb{C}, \quad \boxed{g(t) := f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t).}$$

2.) Es gilt die

$$\boxed{\text{Invarianz von } \int_\gamma f(z)\,dz}$$

bei orientierungserhaltenden Parameter-transformationen bzw.

Vorzeichenwechsel bei Orientierungsumkehr.

Beispiel p. 30

(→ vgl. Kap. 17.1)

3) **Rechenregeln**: wie immer gilt

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt,$$

$$\int_\gamma (f(z) + g(z))\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \int_\gamma g(z)\, dz$$

sowie $(\lambda \in \mathbb{C})$

$$\int_\gamma (\lambda f)(z)\, dz = \lambda \int_\gamma f(z)\, dz.$$

(nachrechnen mit der Definition!)

<u>Bspl. zu 2.)</u>: Sei $\begin{cases} I = [0,1], \\ \gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}. \end{cases}$

Setze z.B. $\beta : I \to \mathbb{C}$, $\boxed{\beta(t) := \gamma(t^2)}$

<u>Beh.</u>: $$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\beta f(z)\,dz$$

<u>denn</u>: $$\int_\beta f(z)\,dz \underset{\mathrm{Def}}{=} \int_0^1 f(\beta(t))\,\dot\beta(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (f\circ\gamma)(t^2)\,2t\,\dot\gamma(t^2)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[(f\circ\gamma)\,\dot\gamma\right](t^2)\,2t\,dt$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt \underset{\mathrm{Def}}{=} \int_\gamma f(z)\,dz$$

$\uparrow$ <u>Transformationsformel</u> für "$\int_0^1 \ldots dt$"

4) Darstellung in Real- und Imaginärteil:

Sei $\gamma(t) := \varphi(t) + i\,\psi(t)$,

$f(z) := u(x,y) + i\,v(x,y)$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \left[u(\varphi(t),\psi(t)) + i\,v(\varphi(t),\psi(t))\right]\left[\dot\varphi(t) + i\,\dot\psi(t)\right]dt$$

$$= \int_a^b \left[u(\ldots)\,\dot\varphi(t) - v(\ldots)\,\dot\psi(t)\right]dt$$

$$+\, i\int_a^b \left[v(\ldots)\,\dot\varphi(t) + u(\ldots)\,\dot\psi(t)\right]dt$$

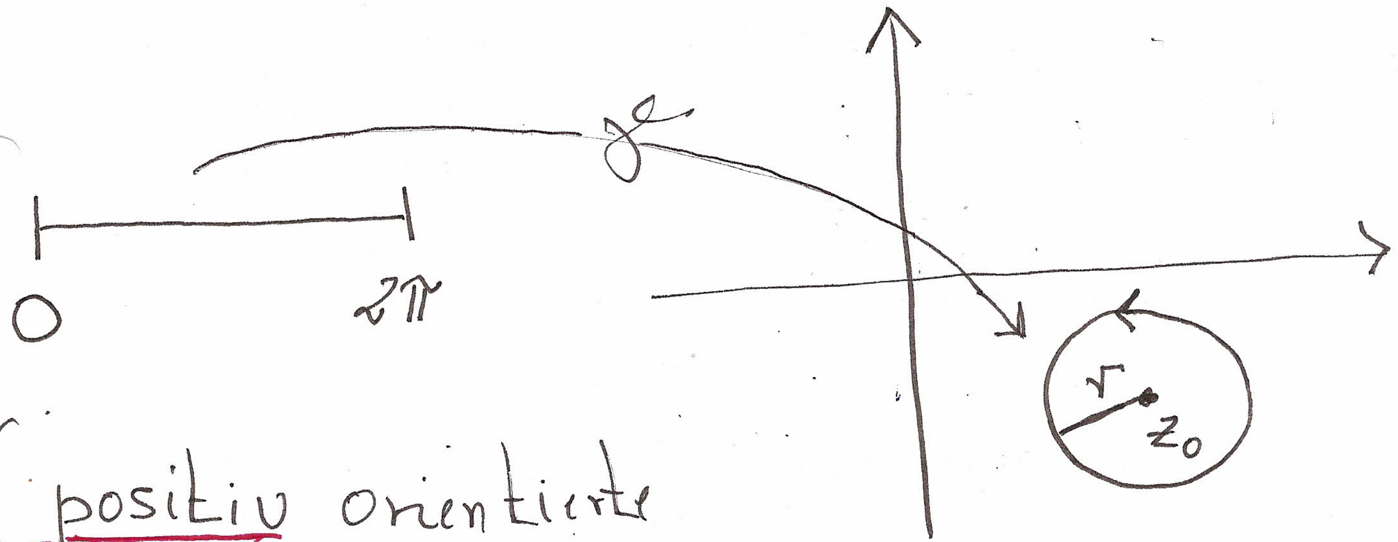
mit $u(\ldots) = u(\varphi(t),\psi(t))$, $v(\ldots) = \ldots$

$\square$

Beispiele:

i) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + r e^{it}$

mit $r > 0$ (Radius) und $z_0 \in \mathbb{C}$ (Mittelpunkt)



(positiv orientierte Kreislinie)

$$\boxed{\dot{\gamma}(t) = r i e^{it}}$$ in komplexer Notation

bzw. $\dot{\gamma}(t) = r(-\sin t, \cos t)$

als Vektor in $\mathbb{R}^2$

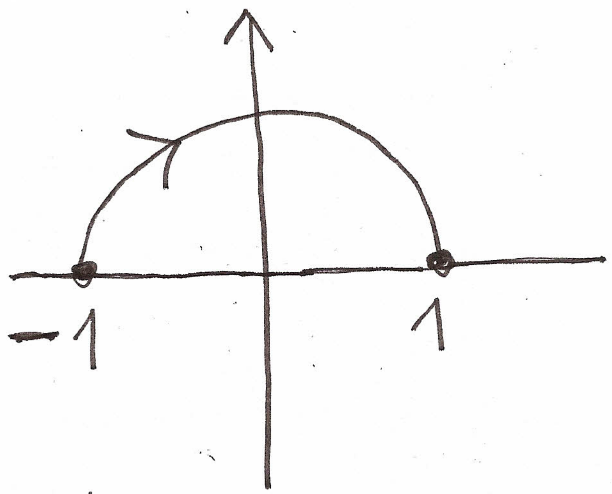
ii) Wir wollen (die nicht holomorphe Fkt.)

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := |z|,$$

längs verschiedener Wege integrieren:

a) $\boxed{\text{Halbkreis } \gamma \text{ von } -1 \text{ bis } 1}$

$$\gamma: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{i(\pi - t)}$$

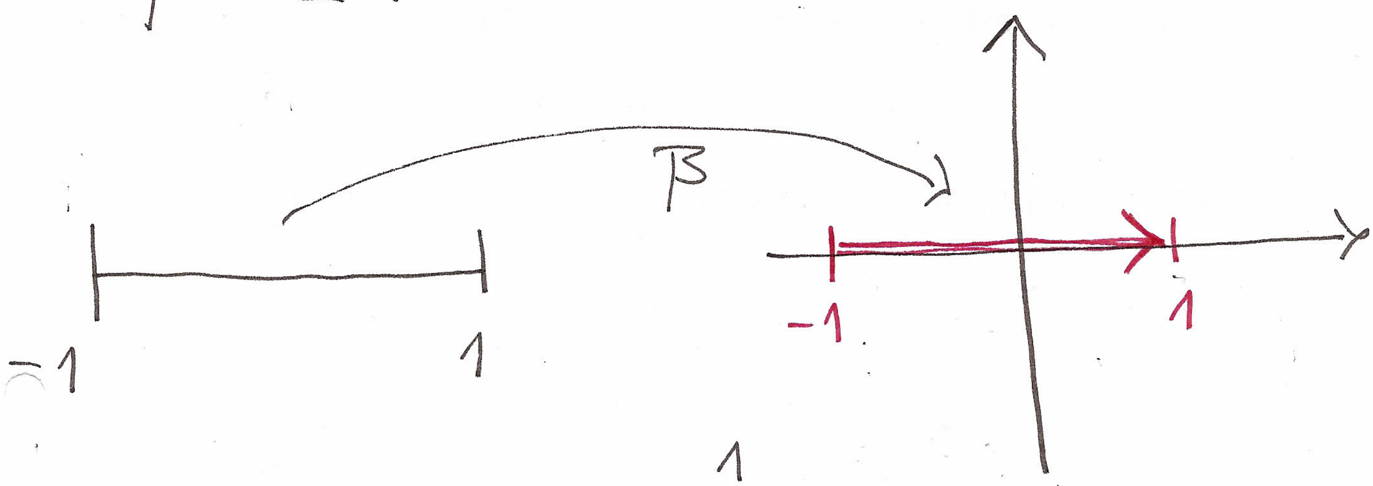


$$\int_\gamma |z| \, dz \underset{\text{Def.}}{=} \int_0^\pi \underbrace{|\gamma(t)|}_{\equiv 1} \dot{\gamma}(t) \, dt$$

$$= \int_0^\pi \dot{\gamma}(t) \, dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hauptsatz}}}{=} \gamma(\pi) - \gamma(0) = 2$$

b) $\boxed{\text{Strecke } \beta \text{ von } -1 \text{ bis } 1}$

$$\beta : [-1,1] \ni t \mapsto t \in \mathbb{C}$$



$$\Longrightarrow \int_\beta |z|\, dz = \int_{-1}^{1} |t|\, dt = 1.$$

Feststellung: Die Wege γ und β haben gleiche Anfangs- und Endpunkte, die Integrale von $z \mapsto |z|$ sind aber verschieden. M.a.W.:

! $\boxed{\int_\alpha f(z)\,dz \text{ hängt i.a. nicht nur von Anfangs- und Endpunkt von } \alpha \text{ ab.}}$